NSI 02 - La représentation des entiers (le binaire)

I. Introduction : le système décimal

Le **système décimal** désigne un système de représentation des nombres en base 10. Cela signifie que l'on utilise 10 symboles (les chiffres de 0 à 9) pour écrire les nombres.

Ces dix chiffres permettent de représenter les quantités de zéro à neuf.
Pour représenter dix unités, on fera un paquet de dix (une dizaine). On n'a plus de nouveau symbole, on utilise le symbole "1", mais en **position** dizaine : 10.

Pour la suite, on additionne les dizaines et les unités :

11	$=$	1 dizaine	$+$	1 unité,
12	$=$	1 dizaine	$+$	2 unités,
...				
21	$=$	2 dizaines	$+$	1 unité,
...				
99	$=$	9 dizaines	$+$	9 unités.

99 est le plus grand nombre possible à deux chiffres.
Le nombre suivant, cent, représente un paquet de $10 \times 10 = 100$ (une centaine).
$100 = 10 \times 10 = 10^2$.
De 100 à 999, les nombres se représentent avec 3 chiffres.
Pour représenter le nombre suivant, on écrit : $1000 = 10 \times 100 = 10^3$.
Et ainsi de suite.

Le système **décimal** utilise 10 chiffres, et leurs positions représentent les puissances de 10 successives. C'est un **système positionnel** : le 2 de 523 n'a pas la même valeur que le 2 de 132.

$4523 = 4$ milliers $+ \ 5$ centaines $+ \ 2$ dizaines $+ \ 3$ unités
$4523 = (4 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (3 \times 10^0)$.

II. Autres bases de numération

On peut selon ce principe imaginer une infinité de systèmes numériques fondés sur des bases différentes. Le choix de faire des paquets de 10 est sans doute dû au fait que nous ayons 10 doigts. Mais certaines civilisations avaient choisi la base 20 ou la base 60.
D'ailleurs, aujourd'hui, la base 60 est toujours utilisée pour la mesure du temps :
1 heure $= 60$ min $= 3600$ s.
Concernant la base vingt, nous en avons les vestiges dans la lecture des nombres en français : quatre-vingts, quatre-vingt-dix... à une époque, on pouvait rencontrer vingt-et-dix (30), deux-vingt (40), trois-vingt (60) !

1) Et si on n'avait que quatre symboles ?

Imaginons un système numérique avec quatre symboles (on peut imaginer ce qu'on veut) :

$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$
a	b	c	d
0	1	2	3

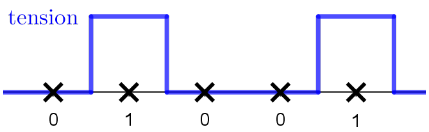
Écrire les nombres suivants avec le système à quatre symboles :

zéro :	neuf :	dix-huit :
un :	dix :	dix-neuf :
deux :	onze :	vingt :
trois :	douze :	vingt-et-un :
quatre :	treize :	trente-deux :
cinq :	quatorze :	quarante-huit :
six :	quinze :	soixante-trois :
sept :	seize :	soixante-quatre :
huit :	dix-sept :	soixante-cinq :

Un système numérique en base 4 utilise 4 symboles (chiffres), et leurs positions représentent les puissances de 4 successives.
$bacd = (1 \times 4^3) + (0 \times 4^2) + (2 \times 4^1) + (3 \times 4^0)$.

III. Les systèmes de numération en informatique

L'informatique est basée sur du courant électrique, qui passe, ou ne passe pas. Les ordinateurs modernes utilisent des transistors, qui jouent le rôle de petits interrupteurs, qui laissent ou non passer le courant.
À un instant donné, il n'y a que deux positions possibles : la tension est nulle, ou elle ne l'est pas.
Il a donc fallu construire le codage des informations, dans les ordinateurs, sur un système à 2 états.
Ces deux états pourront être interprétés comme 0 (tension nulle) et 1 (tension non nulle).



L'informatique utilise donc le système binaire (base 2), et tous les calculs vont se baser sur l'algèbre booléenne à 2 états (0 et 1, **`False`** et **`True`**).
Deux symboles suffisent : on prend 0 et 1.

1) Et si on a deux symboles ? Le système binaire

Écrire les nombres suivants avec le système binaire à deux symboles :

zéro :	neuf :	dix-huit :
un :	dix :	dix-neuf :
deux :	onze :	vingt :
trois :	douze :	trente-et-un :
quatre :	treize :	trente-deux :
cinq :	quatorze :	quarante-huit :
six :	quinze :	soixante-trois :
sept :	seize :	soixante-quatre :
huit :	dix-sept :	soixante-cinq :

Un système numérique en base 2 utilise 2 symboles (chiffres), et leurs positions représentent les puissances de 2 successives.
$101001 = (1 \times 2^5) + (0 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$.
$101001 = 32 + 0 + 8 + 0 + 0 + 1$.

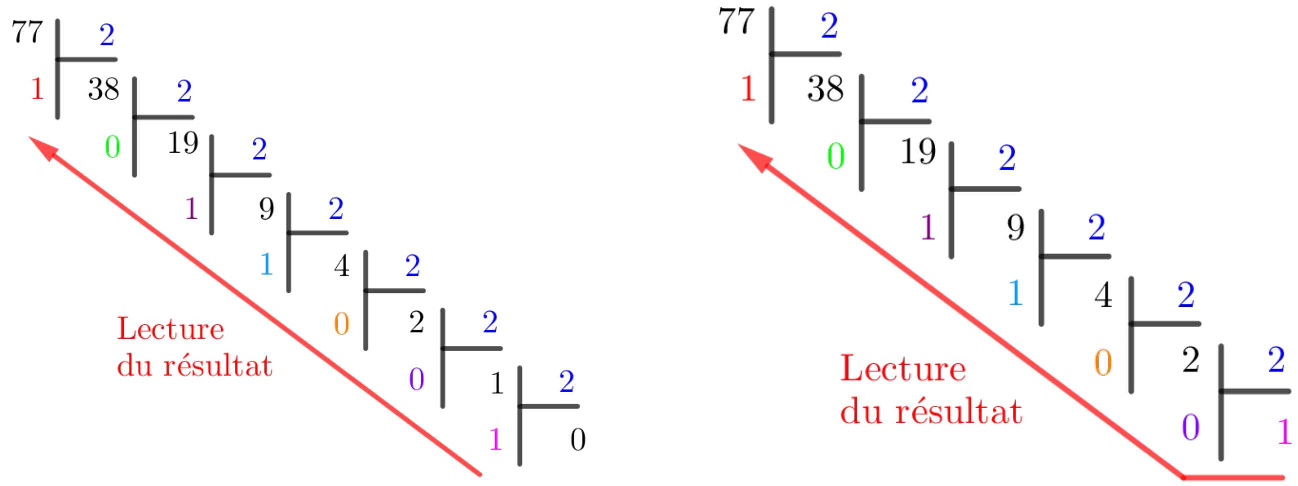
2) Conversion de décimal en binaire ou inversement

Convertissons 01001101 en décimal à l'aide du schéma ci-dessous :

$2^7 = 128$	$2^6 = 64$	$2^5 = 32$	$2^4 = 16$	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$
0	1	0	0	1	1	0	1

Le nombre en base 10 est $2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 64 + 8 + 4 + 1 = 77$.

Allons maintenant dans l'autre sens et écrivons 77 en base 2. Il s'agit de faire une suite de divisions euclidiennes par 2. Le résultat sera la juxtaposition des restes.



77 s'écrit donc en base 2 : 1001101. Si on l'écrit sur un octet, cela donne : 01001101.

3) Et si on a seize symboles ? Le système hexadécimal

Un système hexadécimal demande plus de dix symboles pour écrire les 16 chiffres du système.
Nous prendrons sans surprise :
zéro : 0 ; un : 1 ; deux : 2 ; trois : 3 ; quatre : 4 ; cinq : 5 ; six : 6 ; sept : 7 ; huit : 8 ; neuf : 9 ;
auxquels nous ajouterons :
dix : a ; onze : b ; douze : c ; treize : d ; quatorze : e et quinze : f.

Ainsi : 10 signifie 1 paquet de seize
100 signifie 1 paquet de seize $\times$ seize $= 256$

> Un système numérique en base 16 utilise 16 symboles, et leurs positions représentent les puissances de 16 successives.
> $2af$ = 2 paquets de 256 + dix paquets de 16 + quinze unités .
> $2af = (2 \times 16^2) + (10 \times 16^1) + (15 \times 16^0)$.

Le système hexadécimal n'est pas utilisé tel quel en informatique, mais il est bien plus concis que le binaire, tout en permettant une conversion vers le binaire (presque) sans calcul. On l'utilise donc parfois pour représenter des nombres qui sont en fait codés en binaire dans l'ordinateur : les valeurs numériques des couleurs, les adresses IPv6, etc.

4) Conversion d'hexadécimal en binaire ou inversement

Le tableau ci-dessous montre la représentation des nombres de 0 à 16 dans les bases 10, 2 et 16.

Décimal	0	1	2	3	4	5	6	7
Binaire	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
Hexadécimal	0	1	2	3	4	5	6	7

Décimal	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Binaire	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	1000
Hexadécimal	8	9	A	B	C	D	E	F	10

Chaque "chiffre" en hexadécimal correspond à une puissance de 16. Comme $16 = 2^4$, cela correspond en fait à un groupement de 4 chiffres en binaire.
Par exemple : prenons le nombre en écriture binaire 011001001101

binaire	0110	0100	1101
décimal	$0 \times 2^{11} + 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 0 \times 2^8$	$0 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4$	$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
décimal	$(0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0) \times 2^8$	$(0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0) \times 2^4$	$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
décimal	6×2^8	4×2^4	13
décimal	6×16^2	4×16^1	13
hexa	6	4	D

Pour convertir de binaire à hexadécimal, ou de hexadécimal à binaire, il suffit donc de connaître l'écriture binaire des nombres de 0 à 15 (de 0 à F, écrits en hexadécimal). Aucun calcul n'est nécessaire.

• Pour convertir de binaire à hexadécimal, il suffit donc de faire des groupes de quatre bits (en commençant depuis la droite) et de convertir chaque nombre de 4 digits en hexadécimal.

• Pour convertir d'hexadécimal à binaire, il suffit de convertir chaque chiffre hexadécimal en son écriture binaire, et de les juxtaposer dans l'ordre.

5) Notation

A partir de maintenant, dès que l'on utilise plusieurs bases, et qu'il faut donc préciser, pour chaque nombre, dans quelle base il est exprimé, on l'indiquera en indice :
1101_2 en binaire, 13_{10} en décimal, D_{16} en hexadécimal. On peut écrire : $1101_2 = 13_{10} = D_{16}$

IV. Les opérations

On sait que, en binaire : $0 + 0 = 0$; $0 + 1 = 1$;
$1 + 1 = 10$ c'est-à-dire $1 + 1 = 0$ et on a une retenue de 1.
Les opérations fonctionnent sur la même méthode qu'en décimal, en tenant compte des retenues...

Exercice : Effectuer les opérations posées suivantes :

$$\begin{array}{rr} & 10111 \\ + & 10011 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 10101 \\ - & 01011 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 10111 \\ \times & 101 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100110 & 101 \\ \cline{2-2} & \\ & \end{array}$$